

指数関数のデカウス曲線が、どのようなプロットになるか考えてみました。

まずは、一番簡単な $y = e^x$ を、 $x = s+it$ に対してプロットしてみます。

$$y = e^s \cdot e^{it}$$

$$= e^s(\cos t + i \sin t)$$

これは、

$$t = 0 \text{ で、 } y = e^s$$

$$t = \mathbf{p} \text{ で、 } y = -e^s$$

$$t = 2\mathbf{p} \text{ で、 } y = e^s \dots$$

すなわち、虚部が \mathbf{p} 増える毎に、 $y = e^s$ と $y = -e^s$ が交互に表れるプロットになります (Fig.1)。今まで見ていた $y = e^x$ のグラフは、その一部でしかなかったのですね。

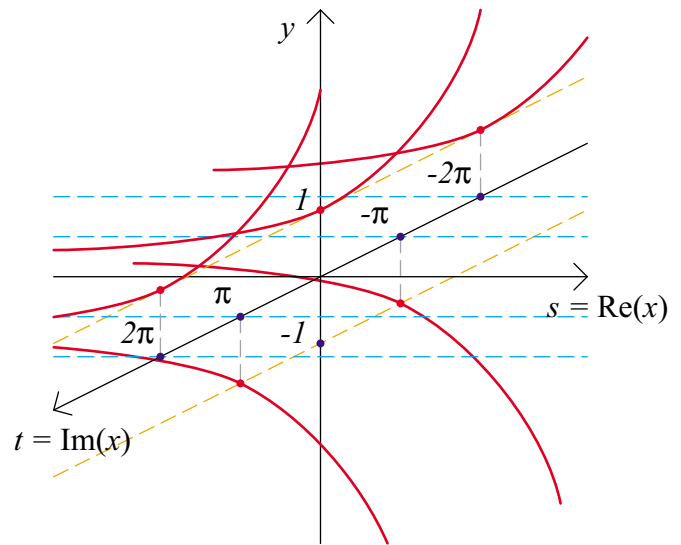


Fig.1

次に、 $y = (-1)^x$ の $x = s+it$ に対するプロットを、同様に考えてみます。

$$y = (e^{pi i})^{(s+it)}$$

$$= e^{ips} \cdot e^{-pt}$$

$$= e^{-pt}(\cos ps + i \sin ps)$$

これは、

$$s = 0 \text{ で、 } y = e^{-pt}$$

$$s = 1 \text{ で、 } y = -e^{-pt}$$

$$s = 2 \text{ で、 } y = e^{-pt} \dots$$

すなわち、実部が 1 増える毎に、 $y = e^{-pt}$ と $y = -e^{-pt}$ が交互に表れるプロットになります (Fig.2)。 $y = e^x$ のグラフを、 90° 回転させた感じになりました。

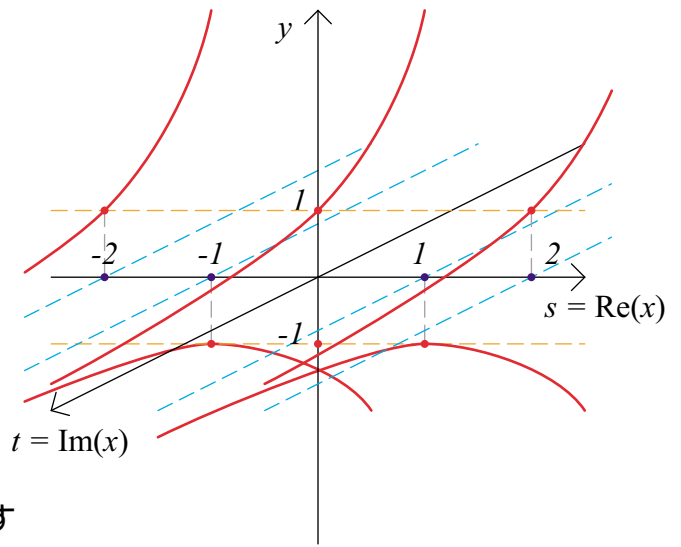


Fig.2

ではさらに拡張して、一般の複素数 $a+bi = r \cdot e^{iq}$ の指数関数のプロットを考えます。

$$y = (r \cdot e^{iq})^{(s+it)}$$

$$= r^{(s+it)} \cdot e^{iqs} \cdot e^{-qt}$$

$$= r^s \cdot e^{-qt} \{ \cos(\log r \cdot t) + i \sin(\log r \cdot t) \} (\cos qs + i \sin qs)$$

$$= r^s \cdot e^{-qt} \{ \cos(\log r \cdot t + qs) + i \sin(\log r \cdot t + qs) \}$$

従って、

$$\begin{aligned} \log r \cdot t + qs = 0 \text{ で、} & \quad y = r^s \cdot e^{-qt} \\ \log r \cdot t + qs = p \text{ で、} & \quad y = -r^s \cdot e^{-qt} \\ \log r \cdot t + qs = 2p \text{ で、} & \quad y = r^s \cdot e^{-qt} \dots \end{aligned}$$

となり、さきほどまでのプロットを、 y 軸を中心に何度か回転させたプロットになりました (Fig.3)。

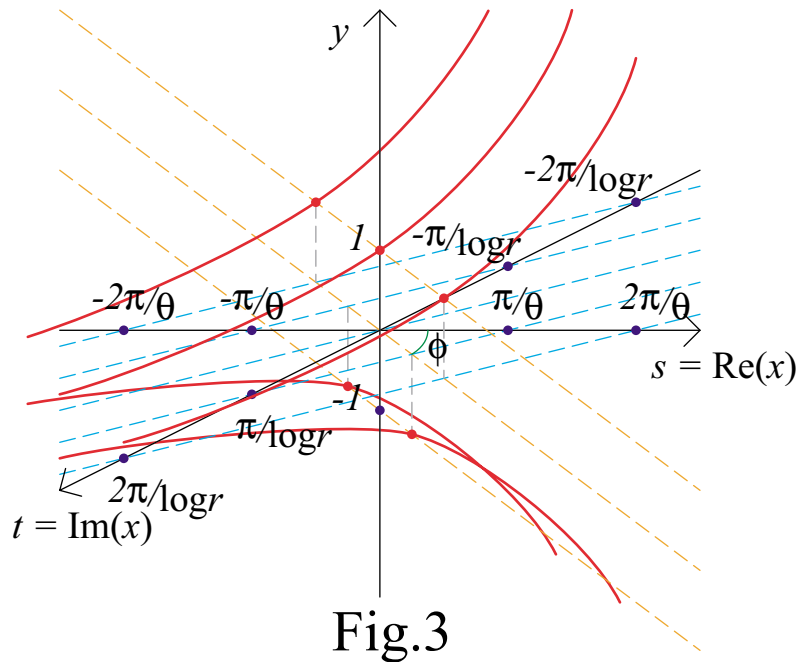


Fig.3

ちなみに、虚軸からの角度が $f = \tan^{-1}(q/\log r)$ となるように回転しています。

つまり、 $q = 0^\circ$ の時 (すなわち $a+bi = r \cdot e^{iq}$ が正の実数の時) は $f = 0^\circ$ となり、Fig.1 のようなプロットになり、 $r = 1$ の時 (すなわち $a+bi$ の絶対値が 1 の時) は $f = 90^\circ$ となり、Fig.2 のようなプロットになります。

それ以外は、それらを何度か回転したプロットになります。

結局、指数関数のデカウス空間におけるプロットは、全て Fig.1 のようなプロットを、 y 軸まわりに回転させた物で表される事になりますね。

(もちろん、変化率の違いはありますが・・・概形は同じですね)

正の実数値に対する指数関数のプロットは $q = 0^\circ$ の時、負の実数値に対するプロットは $q = 180^\circ$ の時となります。

$y = a^x$ で、 a の値を正から負へと徐々に変えて行った時、 $r = 0$ の前後で何故グラフの形が急激に変わってしまうのか、どのような変化が起きているのか不思議に思っていました。が、グルッと回転していたのですね。

位相が完全に逆転している前後で考えていたワケですから、不連続に見えるのも当然ですね (^ ^;)