

# カタログ不要の動的な四彩色アルゴリズム

## Dynamic Topology Control: A Catalog-Free and Deterministic Four-Coloring Algorithm

加藤 一郎  
Ichiro KATO

e-mail : kato@my.zaq.jp

### 要約

本論文では、理論的な4色証明と実用的な計算実装との間のギャップを埋める新しい決定論的な平面グラフ彩色アルゴリズム「動的トポロジー制御」 Dynamic Topology Control (DTC) を紹介する。一般的な彩色のヒューリスティックな手法 (DSATUR や RLF など) は、高速であるが4色保証がなく、古典的な帰納的証明 (RSST など) は、4色を保証するが膨大な構成カタログを必要とする。

対してDTCは、厳密な4色保証と、 $O(N^{1.6})$ という処理速度を同時に実現する。トポロジー変動を分離する「結界ルート」の導入と、局所的な「三つバスワップ」メカニズムを備えた「抜穴ノード」の利用により、彩色プロセス全体を通して4色のみで着色し、内陸ノードの彩色とまったく同じアルゴリズムで最終的に沿岸境界を厳密に3色で塗り切ることを保証する。これは既存のヒューリスティックアルゴリズムでは対処されていない制約である。

三つバスワップにおける無限ループの可能性の理論的否定は依然として未解決の課題であるものの、100万ノード規模の乱数地図で100万回に及ぶ大規模バッチテストによる広範な実証的評価では、完璧な収束を伴う100%の成功率が実証された。

**キーワード** : 平面グラフ、四色問題、彩色アルゴリズム、動的探索、グラフ縮約

**Keywords** : Plane graphs, four-color problem, coloring algorithms, dynamic search, graph reduction

## 1. はじめに

四色定理のコンピュータ支援による証明は、アベルとハーケン(1976)による歴史的な検証以来、大きく進化を遂げてきた[1]。ロバートソンら(1996; RSST)はその後、不可避な構成を633個の可約構成に削減することで、この枠組みをさらに洗練させた[2]。しかし、これらの証明指向の手法は、本質的に可約構成の静的な事前コンパイル済みカタログに依存している。理論的には厳密であるものの、このカタログ依存のアプローチは、実際の実装において2つの重大な制約を抱えている。第一に、大規模なトポロジーデータベースへの依存は、複雑なパターンマッチングコードを必要とし、アルゴリズムの透明性と再実装の容易さを阻害する。第二に、より根本的な問題として、これらの帰納的証明は、カスケード接続されたキャンバススイッチを介して局所的な構成を再帰的に縮約・復元することで色の衝突を解決するため、外部境界(海岸線)における事前定義された色の制約を維持することができない。この構造的な硬直性のため、従来の証明手法は厳密な外部境界条件を必要とする地理情報システム(GIS)やチップ設計ワークフローには不向きであった。

一方、実用的な応用分野では、動的でカタログ不要のグラフ彩色ヒューリスティックが長らく好まれてきた。ウェルシュ・パウエル静的ソート法[3]、DSATUR 動的飽和度ヒューリスティック、再帰的最大優先(RLF)法などの標準的な貪欲法は、高い計算効率( $O(N^2) \sim O(N^3)$ )で動作する。しかし、これらのヒューリスティックアルゴリズムは一般的なグラフ向けに設計されているため、平面トポロジーに限定した場合、厳密な4色彩色を実現できる保証がない。また、1,000ノードを超える複雑で高度に絡み合った平面構造に遭遇した場合、これらの手法はしばしば彩色デッドロックに陥り、4色以上の色を使用するか、コストのかかる非決定的なバックトラックに頼らざるを得なくなる。更にこれらの汎用アルゴリズムは、いずれも最終的な最外縁を3色に強制するための必要なアーキテクチャ機構を備えていない。

提案する動的トポロジー制御(DTC)アルゴリズムは、これらの課題を解決する新しいパラダイムを提案する。本手法は、まず前処理として接続次数3のノード(三国峠)を階層的・再帰的に縮約してコアグラフを抽出する。その後、地図の中央部から外周へ向かって逐次的に着色領域を拡大していく動的彩色を基本とし、デッドロック(手詰まり)が発生した際には、「内陸への押し込み」「前方エリアへのシフト」を順次試行する。それでも解消せず、後方エリアへの逆流(帰着)を検出した場合には、悪循環を防ぐ「仮想スワップによる動的マスキング処理」を施した上で、干渉の起きない「2系統排他スワップ」によって局所的に逆流ルートを安全に破碎する。これらすべての局所的試行が防衛線を突破された場合に限り、多段階のトポロジー動的制御(結界ルート生成、RGガード迂回、抜穴ノード封印、三つバスワップ)へと移行し、決定論的に手詰まりを解消する。これらのアーキテクチャにより、厳密な4色での彩色を保証すると同時に、内陸ノードの彩色と全く同一のアルゴリズムで最終海岸線の3色化も実現することができる。計算機実験の結果、本アルゴリズムは乱数によって生成された1,000ノード規模の平面地図100万例、および10,000ノード規模の平面地図1万例に対し、一度の破綻もなくすべて多項式時間 $O(N^{1.6})$ で彩色を完遂することを確認した。

## 2. 関連研究

四色定理の計算機による証明は、1976年のAppelおよびHakenによる歴史的な報告以来[1]、いくつかの改良を経て現在に至っている。1996年にはRobertsonらによって、不可避集合の数を633個にまで削減した、より効率的な証明アルゴリズムが提示された[2]。しかし、これらの手法は本質的に、グラフの部分構造が既知の「可約構成 (Reducible Configurations)」のカタログに含まれるか否かを判定するパターンマッチングに依拠している。

このようなカタログ依存型の手法には、大きく分けて二つの課題が存在する。第一に、実装の複雑性である。数千におよぶ可約構成のデータを正確に保持し、それらを照合するプログラムは膨大なコード量を必要とし、アルゴリズムの透明性や再実装の障壁となっている。第二に、動的な適応性の限界である。静的なカタログにない特異なトポロジーが出現した際、あるいは特定の制約条件 (例: 最外郭を特定の色数に収束させる等) が付加された際、カタログ方式では柔軟な対応が困難な場合が多い。

一方で、汎用的なグラフ彩色アルゴリズムとして知られるウェルチ・パウエル法[3]や、単純なバックトラッキングを伴う貪欲法などは、カタログを必要としない動的なアプローチである。しかし、これらは最悪時間計算量が指数関数的に増大するリスクを常に孕んでおり、1,000ノードを超えるような大規模な平面グラフに対して、一度の破綻もなく確定的に四色彩色を完遂することは事実上不可能であった。

これに対し本研究は、静的なカタログを一切保持せず、接岸ラインの方向制御や動的な結界ルートの変更といったトポロジー誘導型の動的処理のみで彩色を完遂する。これにより、実装の極めて高い簡潔性を維持しつつ、大規模グラフにおいても多項式時間での収束を実現するものである。

## 3. アルゴリズム概要

本アルゴリズムは、静的なカタログに依拠せず、局所および広域のトポロジーを動的に制御することで彩色を完遂する。本章では、提案手法の全体像を8つの主要なステップに分けて概説する。各ステップの相互関係および処理の回帰構造を図3-1 (フローチャート) に示す。

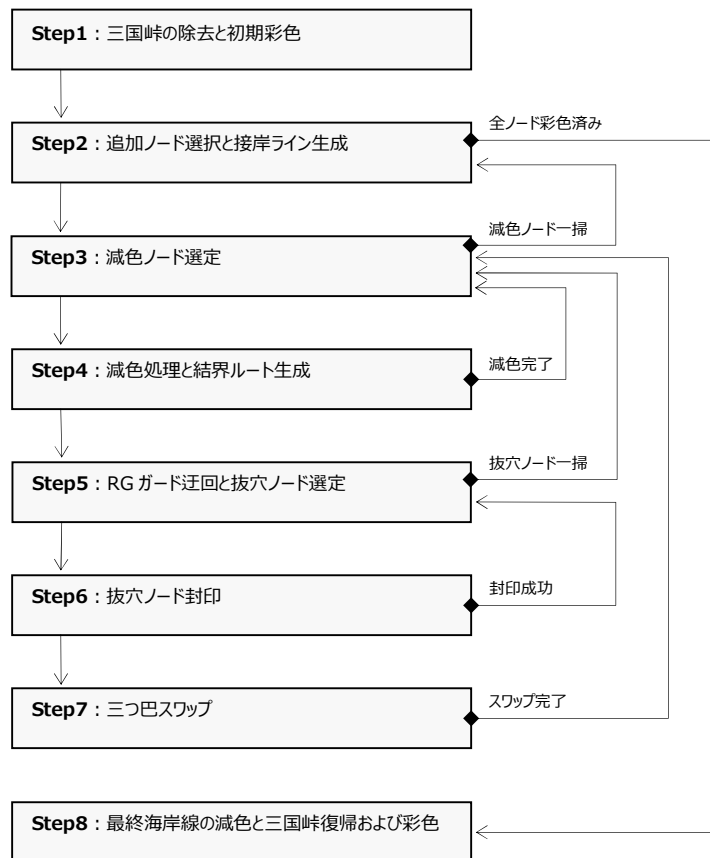


図 3-1 : アルゴリズム全体処理フロー

本アルゴリズムの全工程と、各フェーズ間における回帰構造を示している。彩色不能 (デッドロック) を検出するたびに Step 3 から Step 7 へと階層的に解決策を移行させ、解消と同時に下位の基本プロセスへ復帰する「階層的回帰」が本手法の中核である。

### 3.1 処理の基本フローと階層的回帰

本アルゴリズムの核心は、彩色プロセスの各段階において「彩色不能 (デッドロック)」を検出した際、より高次の解決策へと階層を移行させ、成功時には直ちに下位の基本プロセスへと回帰する点にある。

### Step 1 : 三国峠の除去と初期彩色

前処理として次数3のノード(三国峠)を再帰的に縮約し、コアグラフを抽出する。  
その後、地図中央の三角面を起点として初期彩色を行う。

### Step 2 : 追加ノード選択と接岸ライン生成

海岸線に隣接する未彩色ノードを順次「追加ノード」として選択し、領域を拡大する。  
全ノードの彩色が完了した場合は Step 8 へ移行する。

### Step 3 : 減色ノード選定

追加ノードの隣接色が4色すべてを占有している場合、接岸ライン上から減色すべきノードを選定する。

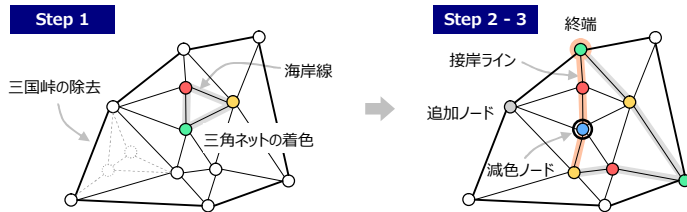


図 3-2 : 基本彩色と接岸ラインの発生

前処理による三国峠の除去から、地図中央での初期彩色、および「追加ノード」の選択に伴う接岸ラインの形成過程を示している。彩色領域を中央から外周へ向かってトポロジカルな一貫性を保ちながら拡大する様子を表す。

### Step 4 : 減色処理と結界ルート生成

方向制御スワップや2系統排他遮断を階層的に試行する。  
減色に成功した場合は Step 2 の「追加ノード選択」へ戻り、解消しない場合は「結界ルート」を生成する。

### Step 5 : RG ガード迂回と抜穴ノード選定

結界ルート上の安全な経路(RG ガード)を探索して先行迂回を行う。  
同時に、デッドロックの要因となる「抜穴ノード」を厳密に特定する。

### Step 6 : 抜穴ノード封印

抜穴ノードに対して、封印スワップを試みる。  
封印に成功した場合は、トポロジーが更新されたため Step 5 へ復帰し新たな抜穴ノードを選定する。

### Step 7 : 三つ巴スワップ

封印が限界に達した極限状態において、6種類の「三つ巴スワップ」を発動し、位相を強制的に攪拌する。

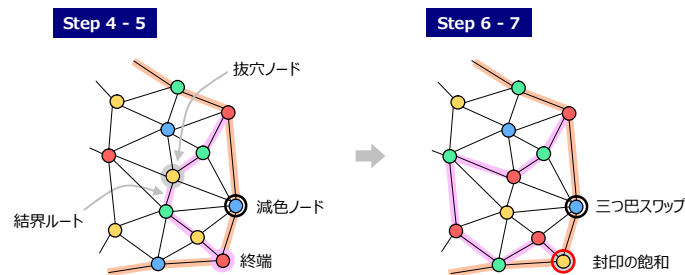


図 3-3 : 結界ルートと抜穴ノード

局所的なスワップで解消できないデッドロックに対し、減色ノードを包囲する「結界ルート」を生成し、トポロジ的に色の影響範囲を限定するプロセスを示している。結界ルートの封印が飽和した極限状態が「三つ巴スワップ」の発動トリガーとなる。

### Step 8 : 最終海岸線の減色と三国峠復帰および彩色

すべてのコアグラフ彩色完了後、仮想海ノードを用いた最終海岸線の減色を行う。  
最後に前処理で除去した三国峠ノードを逆順に復帰させて全彩色を完遂する。

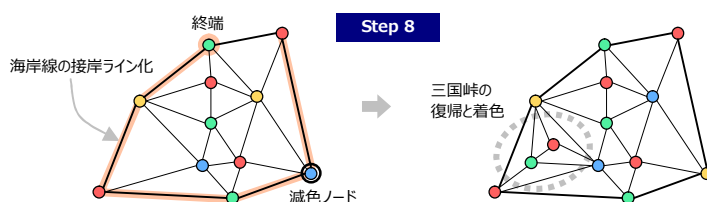


図 3-4 : 最終海岸線の減色と三国峠復帰

全コアグラフの彩色完了後、仮想海ノードを用いて最外郭を3色に収束させる処理、およびスタックに保持された三国峠ノードを逆順に復帰させ、100%の確率で全彩色を完遂する最終工程を示している。

## 4. アルゴリズム詳細

本章では、第3章で概説したアルゴリズムの各ステップについて、その具体的な論理構造とトポロジー制御のメカニズムを詳述する。本手法の核心は、局所的な彩色矛盾を単なる「探索問題」として扱うのではなく、グラフの位相幾何学的な性質に基づき、階層的な救済策を適用することで決定論的に解決する点にある。具体的には、彩色プロセスを既存の彩色に干渉しない「前方への伸展」に限定し、デッドロック発生時には、ケンプレ鎖の動的制御や領域の孤立化といった階層的アプローチを順次発動させる。以下、前処理から最終的な彩色完遂に至るまでの各フェーズについて、その数理的背景とともに解説を行う。

### 4.1 グラフ縮約と初期彩色の確立(前処理)

本節では彩色プロセスを効率化するためのグラフの簡約化、および探索の起点となる初期状態の構築について述べる。

#### 4.1.1 三国峠(次数3ノード)の再帰的除去

入力グラフから、内陸に位置する接続次数が3のノード(以下、「三国峠ノード」)をすべて探索し、これらを一時的に除去する。本研究では地図生成の段階で、最外郭では次数1のノードを、内陸では次数2以下のノードをあらかじめ排除しているため、除去対象は内陸の次数3に限定される。三国峠の除去によって隣接ノードの次数が新たに3となった場合、それらも再帰的に除去し、除去順をスタックに保持する。これにより、内陸のグラフは次数4以上のノードのみで構成される「コアグラフ」へと簡約される。

(注) 海岸線に存在する次数3のノードをあえて除去しない理由は、最終の彩色状態で海岸線が3色化されていることを保証するためである。次数2以下であれば除去できるが、彩色効率に大きく寄与しないと判断し除去せず進める。

#### 4.1.2 初期海岸線の形成

簡約されたコアグラフの中央付近に位置する任意の三角面を選択し、相異なる3色を割り当てる。この彩色済み三角面の外周を構成する3つの辺を、最初の「海岸線」と定義する。以降、この海岸線を外周へ向かって順次拡大していく。

### 4.2 接岸ラインの生成と方向制御

本節では、既彩色領域を拡張する際の基本的な手続きと、局所的な色彩の衝突を回避するための動的制御メカニズムについて述べる。本アルゴリズムは、単なる色の割り当てにとどまらず、スワップの波及範囲をトポロジカルに制御することで探索の効率化を図っている。

#### 4.2.1 追加ノードの選択と接岸ライン

海岸線(4.1.2節)に隣接する未彩色ノードの中から、地図中央に近いものを優先して「追加ノード」として選択する。この際、追加ノードの接続先となる既彩色ノード群は、海岸線上で連続していなければならない。この連続性の制約により、内陸部に未彩色ノードが取り残される事態を防ぎ、彩色領域のトポロジカルな一貫性を維持する。この追加ノードが接続する一連の彩色済みノード群を、本稿では「接岸ライン」と呼ぶ。接岸ラインを構成するノード群に使用されている色が3色以内である場合、追加ノードには単純に未使用の色を割り当てることができ、既彩色領域を拡大して次の追加ノードの選択を繰り返す。接岸ライン上で既に4色すべてが使用されている場合に限り、次節の減色処理へと進む。

#### 4.2.2 減色ノードの選定と方向性スワップ

追加ノードを彩色するために、接岸ライン上のいずれか1色を減じる必要がある。この減色対象として選択された接岸ライン上のノードを「減色ノード」と呼ぶ。接岸ラインの両端を「始端」および「終端」として割り振り、スワップの伝播に方向性を持たせる。ここでの「後方」とは、接岸ラインの並びにおける始端側のノード群を指す。スワップの影響がこの後方へ帰着(逆流)することを禁止することで、探索の無限ループを抑制する。

(注) 本稿では、以降の議論の明晰さを期すため、一般性を失うことなく特定の色に役割を固定して記述する。具体的には、減色ノードの色を常に青(B)と定義し、これに伴い後述する抜穴ノードを黄色(Y)、ガード色を赤(R)および緑(G)に限定して解説を進める。

#### 4.2.3 階層的減色プロセス

方向制御(4.2.2節)に基づき、減色ノードBの色変更を試みる際、本アルゴリズムは彩色済み領域への悪影響を最小化するため、以下の3段階の階層的処理を順次実行する。

### 第1段階： 双方向帰着禁止スワップ(内陸押し込み)

減色ノードBを対色(R, G, Yのいずれか)で置換する交互連鎖を試行する。この際、スワップの影響範囲が「後方エリア(接岸ラインの始端側)」および「前方エリア(接岸ラインの終端側)」のいずれにも帰着(ループ)しない場合、そのスワップを確定し、減色を完了する。

### 第2段階： 前方帰着許容スワップ

第1段階で解消しない場合、後方への帰着を禁止した上で、前方エリアへの帰着のみを許容するスワップを試行する。これにより、彩色済み領域の深部を守りつつ、未彩色境界付近のトポロジーを活用して減色を試みる。

### 第3段階： 2系統排他スワップ

上記すべてが失敗し、後方エリアへの帰着(逆流)が不可避となった場合、単一のカラーペアによるスワップでは解消不可能な長大なケンプレ鎖に対し、本アルゴリズムは「2系統排他スワップ」を適用する。これは、ターゲットとなる連鎖ルートに対し、それとは干渉しない排他的な色のペアを用いて、2系統のスワップを連続(あるいは同時)実行することで、連鎖内に別の要素色を強制的に挿入し、その連続性を遮断する手法である。

(注) 本処理の実行に際しては、事前に帰着に関連しない連鎖ルートの枝刈り(4.2.4 節詳述)および、後方エリアを保護する動的マスキング処理(4.2.5 節詳述)を併用し、影響範囲を厳格に限定する。

遮断スワップの組み合わせは、減色ノードBに対峙する3種の連鎖ルートに対し、以下のように定義される。各連鎖ルートに対し、スワップするペアを入れ替えることで2種類の排他処理が可能であり、合計6種類のパターンによってあらゆる連鎖構造の分断を試行する。

- BR 連鎖ルートに対する遮断 : (BG + RY) および (BY + RG)
- BG 連鎖ルートに対する遮断 : (BY + GR) および (BR + GY)
- BY 連鎖ルートに対する遮断 : (BR + YG) および (BG + YR)

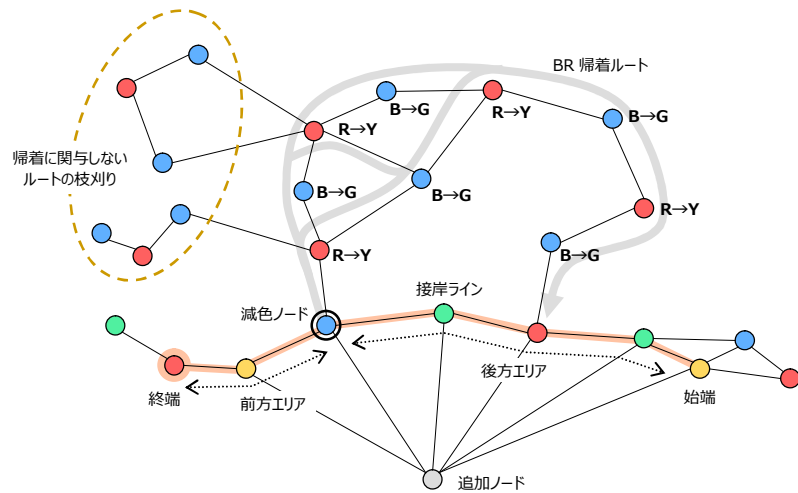


図 4-1 : 2 系統排他スワップによる連鎖ルートの抽出と分断

単一のカラーペアでは解消できない長大な連鎖ルート(例:B-R鎖)に対し、異なる2組のペア(BG+RY)を用いて多角的に干渉するプロセスである。枝刈りによって特定されたターゲットの鎖に対し、排他的な2系統スワップを重量させることで、トポロジー的な接続性を強制的に破壊する。これは、高次の「三つバスワップ」へと移行する前段階の、強力な色彩分断戦術として機能する。

この「2系統による挟み撃ち」は、探索範囲を物理的に広げることなく、トポロジー的な接続性を動的に組み替える強力な手段となる。なお、この2系統遮断スワップの実行中、トポロジーの再構成に伴う副作用として、減色ノードBの色が直接反転し、彩色が確定する場合がある。この即時解決が確認された場合は、その時点で当該ノードの減色成功と見なし、直ちに次のノード選定へと移行する。もし直接的な色変更が起きない場合でも、遮断によって形成された安全なトポロジーを利用して、改めて減色ノードのスワップを試みる。

これらのすべての試行によっても減色が不可能な場合に限り、次節の「結界ルート」の生成へと移行する。



### 4.3 結界ルートの生成と封印

方向制御スワップや遮断処理(4.2.3 節)によっても減色が達成できない場合、アルゴリズムはより広域的なトポロジー制御である「結界ルート」の生成へと移行する。通常のケンプレ鎖スワップではなく、結界ルートという概念を導入することで、影響範囲のトポロジー的な孤立化が可能となる。

#### 4.3.1 結界ルートと抜穴ノードの定義

減色ノードBを起点とし、その周囲の彩色済みノード群を連結して形成される閉路(またはそれに準ずる経路)を「結界ルート」と定義する。このラインは、減色ノードをトポロジー的に包囲し、色の影響範囲を限定する「境界」として機能する。また、結界ルート上のノードのうち、減色ノードからの BY 連鎖を通じて接岸ラインの後方エリアへ帰着する経路ノードを「抜穴ノード」と定義する。この抜穴ノード Y を R あるいは G に色変更し、最終的に結界ルート全体を RG ケンプレ鎖として再構築することを目指す。結界ルートから抜穴ノードが一掃された状態を「封印の完了」と呼ぶ。封印が完了すれば、結界ルートが RG で構成されるため、その内側に位置する減色ノードの BY スワップが接岸ライン後方に帰着しないことがトポロジー的に保証され、確実な減色が可能となる。

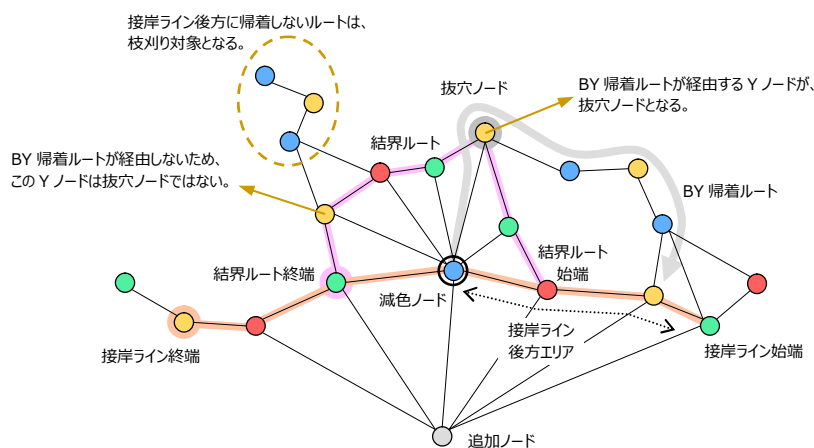


図 4-3：結界ルートによる彩色影響範囲の孤立化

減色ノードをトポロジー的に包囲し、色彩の干渉範囲を完全にコントロール下に置く「結界ルート」の形成過程を示している。後方エリアへの「抜穴」となるノードを特定し、これを隣接するガード構造(RG ガード等)へと追いつめ封印することで、大規模なグラフにおいても、局所的な矛盾を他の領域に波及させることなく解決することが可能となる。

(注) 経路ノードを正しく判定するためには、減色ノードから後方へ帰着するBY連鎖ルートにおいて、帰着に関与しない不要な枝(Spurious branches)をあらかじめ排除する「枝刈り」処理が不可欠である。

#### 4.3.2 RG ガードによる迂回

一方、結界ルート上の Y ノードの内、減色ノードからの BY 連鎖が経路しないノードは抜穴ノードと即断できない。このノードを検出した場合、そのノードは周囲の R および G のノードによって形成される強固なパス(以下、「RG ガード」)によって既に保護されている可能性がある。もし RG ガードが確認できた場合は、結界ルートをこの RG ガードに沿う形であらかじめ迂回させる。すなわち、該当の Y ノードを結界ルートの内側に取り込んだり、外側に追い出したりすることになる。なお、抜穴ノードが経路点でないにもかかわらず、結界ルートに対するRGガードが存在しない場合は、減色ノードをダイレクトに減色可能な状態であるため、減色ノードを直接Yスワップし、減色ノードの選定に戻って処理を続行する。

#### 4.3.3 封印スワップ

特定された抜穴ノードに対し、隣接する後方ノード(トポロジー的にRまたはGとなる)の対色によるスワップを試みる。この処理の目的は、結界ルートから特定色Yを排除(パージ)し、ラインを2色鎖へと純化させることにあり、本稿ではこの操作を「封印」と呼称する。まず抜穴ノードの前方ノード色を後方ノード色と同色化しておく。次に、抜穴ノードにおいて封印色によるスワップを試行する。このスワップが結界ルート後方に帰着しない場合は封印成功であり、スワップを確定する。対して、後方エリアに帰着した場合は、次節の三つ巴スワップに移行する。

## 4.4 三つバスのワップによる動的位相攪拌

本アルゴリズムは、結界ルートの封印限界を打破するため、3色循環による「三つバスのワップ」を実行する。

### 4.4.1 6種類の回転ワップ

通常のワップが1次元的な2色間の置換であるのに対し、三つバスのワップは減色ノードを固定的な起点として、周囲の色彩をトポロジ的に「回転」させる2次元的な処理である。具体的には、減色ノードを支点とした異なるペアによる2連続のワップによってこれを実現する。減色ノード(B)を除いた残る3色(R, G, Y)の組み合わせから、以下の3つのペアに対して正逆2方向の回転を定義することで、合計6通りの遷移パターンが構成される。

RG 系ワップ : { RG(正回転), GR(逆回転) }  
 GY 系ワップ : { GY(正回転), YG(逆回転) }  
 YR 系ワップ : { YR(正回転), RY(逆回転) }

RG系ワップの { RG(正回転) } を例にとれば、減色ノードBに対してまず(BR)ワップ、続けてRとなった減色ノードに対して(RG)ワップを連続実行することで、減色ノードおよびその隣接領域の色彩位相を1ステップ分遷移させる。本アルゴリズムでは後述する「抜穴ノード依存型カウンタ」に基づき、これらのパターンを順次切り替えることで、静的な探索では不可能な動的な位相攪拌を実現する。なお、通常のワップは同セットのワップを2回行うと、元の彩色状態に回帰するが、三つバスのワップでは3回行うことで回帰する。

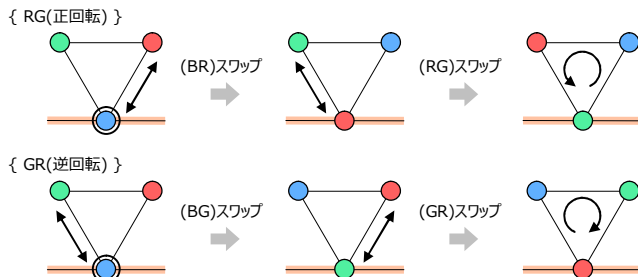
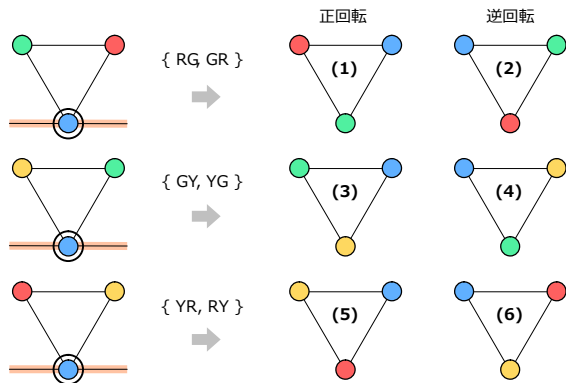


図 4-5 : 三つバスのワップの原理

減色ノードBに対し、2つのワップを連続実行することで、減色ノードを含む三角ネットの着色が回転する。ワップの順番を変えると逆回転となる。

### 4.4.2 抜穴ノード依存型カウンタと位相攪拌

三つバスのワップの最大の特徴は、上記の6パターンのうちどのパターンを適用するかを制御するカウンタを、実際のワップ対象である減色ノードではなく、封印が行き詰った「抜穴ノード」側に、それぞれ独立して保持させる点にある。封印が不可となるたびに、該当する抜穴ノードのカウンタをインクリメントし、パターンを1つずつ更新しながら実施する。これにより、グラフのトポロジーに依存した非対称な「動的位相攪拌」が誘発され、固定的な探索では陥りやすい対称性の罠(循環状態)を破壊し、決定論的に彩色を完遂へと導く。



(n)は三つバスのワップの実施パターンを表すカウンタ。デッドロック状態の減色ノードは、必ず他の3色(R,G,Y)と接続されているため、どのパターンでも実施可能である。

図 4-6 : 三つバスのワップの6パターン遷移図

減色ノードBを除く3色(R, G, Y)の各ペアに対し、正逆2方向の回転を定義した計6通りの遷移パターンを示す。抜穴ノードに紐付けられたカウンタがインクリメントされるたびに、これらのパターンが順次選択される。この網羅的な位相攪拌により、局所的なトポロジーの対称性が打破され、静的なカタログに依存しない彩色完遂が可能となる。

## 4.5 最終海岸線の減色とトポロジー復元(後処理)

本節では、コアグラフの彩色完了から、地図全体の彩色を完遂させるまでの手順を述べる。

### 4.5.1 仮想ノード導入による最終海岸線の減色

コアグラフの全ノードの彩色が完了した段階で、実用的な地図表現(外海の色確保)に対応するため、最終的な海岸線の減色を行う。まず、最外郭の全ノードと接続する「仮想ノード(海ノード)」を内部的に生成し、最外郭全周を一つの巨大な接岸ラインとして再定義する。この海ノードを「追加ノード」と見なすことで、内陸部と全く同一のアルゴリズムシーケンス(4.2節～4.4節)がそのまま駆動し、最外郭を3色に収束させると同時に、海ノードに残る1色を確定させる。

### 4.5.2 三国峠ノードの復帰と彩色

最後に、前処理(4.1.1節)において除去し、スタックに保存されていた「三国峠ノード」を、除去時とは逆の順序で順次グラフ上に復帰させる。復帰した各ノードは、トポロジー的に3つの彩色済みノードとしか隣接していないことが保証されている。したがって、周囲で使用されていない4色目のカラーを機械的に割り当てただけで、バックトラッキングを一切発生させることなく、地図全体の彩色が100%の確率で完了する。なお、三国峠は内陸であるため、外海の色が最外郭に出現することはない。

## 5. 実験結果および評価

本章では、まず実験に利用した地図の生成に組込んだ独自アルゴリズムを示す。続いて実験用ソフトウェアの紹介、および生成された地図の彩色結果を報告する。評価としては、特に処理速度に関して言及する。

### 5.1 評価用グラフの生成

本研究におけるアルゴリズムの堅牢性を検証するため、乱数を用いて大規模な平面グラフ(地図)を大量に生成し、実験を行った。平面グラフの生成にはドロネー三角形分割(Delaunay Triangulation)[4]をベースとした手法を用いるが、通常の生成法では外周部に四色彩色において冗長あるいはイレギュラーなトポロジーとなる「ひげ(次数1)」や「耳(次数2)」が不可避に発生する。

本研究では、これらの発生を根源的に抑止するため、外郭三角形の頂点を無限遠点と定義した上で、以下の幾何学的制約(フリップ抑止・誘導規則)を組み込んだ独自の地図生成アルゴリズムを考案・適用した。概念としては、外郭三角形の頂点は無限遠に存在すると考えて処理を行う。

#### 規則1: 孤立頂点のフリップ制御

孤立頂点のみが外郭三角形の頂点である場合は、トポロジーの破綻を防ぐため、辺のフリップ(Flipping)を行わないと決定論的に判定する。外郭三角形の頂点は無限遠に存在すると定義しているため、直線である共通辺が、外接円の一部であると解釈して処理する。

#### 規則2: 内在トポロジー判定に基づくフリップ誘導

共通頂点に外郭三角形の頂点が存在する場合、通常の外接円の内外判定(Delaunay 準拠)を一時的に保留し、「仮にフリップを行った場合に生成される、新しい三角形の内部に共通頂点が存在するか否か」を判定する。外郭三角形の頂点は無限遠に存在すると定義しているため、直線であるフリップ線分が、外接円の一部であると解釈して処理する。

- 外部に位置する場合

「ひげ」や「耳」を排除するためにフリップが必要であると判定し、強制的にトポロジーを組み替える。

- 内部または辺上に位置する場合

通常の外接円チェックへと移行し、ドロネー分割の幾何学的性質を維持する。

本制約により、生成される平面グラフからは「ひげ」や「耳」が初期段階から完全に排除され、彩色アルゴリズムの評価に最適な、ノードの接続関係が均質化された頑健なベンチマーク地図データセットの自動生成が可能となった。

### 5.2 実証ソフトウェア

本アルゴリズムの有効性と決定論的な収束性を検証するため、独自のグラフ彩色シミュレーションソフトウェア(以下、本システム)を開発した。本システムは、ランダムな平面グラフの生成、提案アルゴリズムによる逐次彩色、および最終的な彩色結果の妥当性検算を一貫して行う機能を備えている。検算内容を以下に示す。

- ✓ すべてのノードを着色できているか
- ✓ 接続されているノード間の色を塗り分けできているか
- ✓ 海岸線から青色を除去できているか

本システムの最大の特徴は、彩色プロセスにおける「接岸ライン」の推移や「結界ルート」の形成、および「三つ巴スワップ」の発動状況をリアルタイムで可視化できる点にある。これにより、カタログに依存しない動的なトポロジー制御が、いかにかしてデッドロックを解消し、未彩色領域を収束させていくかを視覚的に確認することが可能となった。

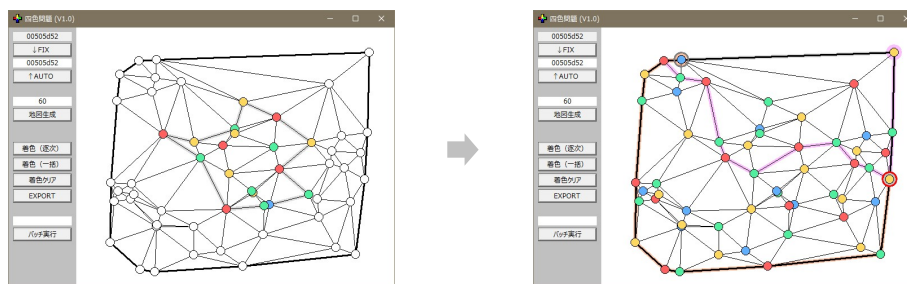


図 5-1：実証ソフトウェアの実行画面例

本研究で開発した検証用プログラムのインターフェース。生成された平面グラフに対し、アルゴリズムが逐次的にトポロジーを制御し、彩色を確定させていく様子をリアルタイムで観測・検算することが可能である。

### 5.3 実験環境とデータセット

- ハードウェア

プロセッサ : Intel(R) Core(TM) i5-8400 CPU @ 2.80GHz 2.81 GHz

実装 RAM : 8.00 GB (7.89 GB 使用可能)

- ソフトウェア

OS : Windows 10 Home (64 ビット オペレーティング システム)

開発言語 : C 言語 (Microsoft Visual C 2015)

- データセット

乱数により生成された 50~10,000 ノードの平面グラフ。

小規模(1,000 ノード以下)では各 100 万例、大規模(10,000 ノードまで)では各 1 万例を試行。

### 5.4 検証結果の要約

乱数による数億におよぶ生成地図の完全彩色において、本システムはすべての試行で彩色を完遂し、エラー（彩色不能または検算失敗）の発生率は 0%であった。また、処理時間はノード数に対して  $O(N^{1.6})$  の多項式時間で推移しており、本アルゴリズムが実用的な計算資源で大規模な彩色問題を確実に解決できることが実証された。

### 5.5 計算量オーダーの解析と実証

本アルゴリズムの計算効率を評価するため、ノード数  $N=3$  から  $N=10,000$  に至る全試行データの実行時間を両対数プロットした(図 5-2)。図から明らかな通り、本手法は 4 桁のノード規模にわたり、単一の回帰直線(傾き約 1.6)上に完璧に配置されている。これは、本アルゴリズムが従来の探索手法のような指数的な破綻を起こさず、数学的に安定した多項式時間  $O(N^{1.6})$  で彩色を完遂していることを実証するものである。特筆すべきは、幾何学的な計算である地図生成処理と、トポロジー制御を伴う彩色処理の傾きが中規模以降ではほぼ一致している点である。これは、本手法が地図構築コストとほぼ同等の軽量の負荷で彩色を実現していることを示しており、極めて高い実用性を裏付けている。

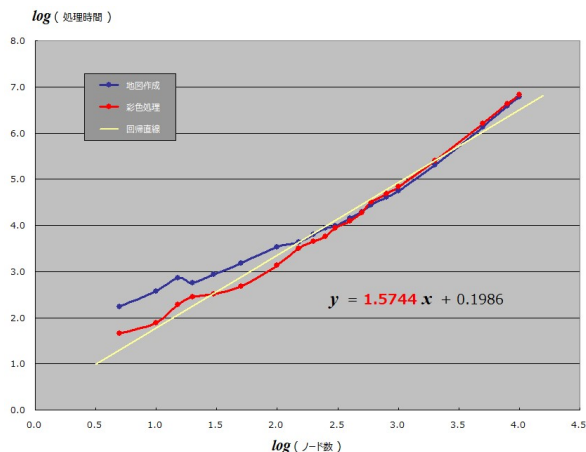


図 5-2：ノード数に対する平均実行時間の推移

$N=3$  から  $N=10,000$  までの実行時間を両対数グラフにプロットした結果。彩色処理の計算時間は地図生成コストとほぼ同等の傾き(約 1.6)を示しており、本アルゴリズムが多項式時間  $O(N^{1.6})$  で安定的に収束することを実証している。

## 6. 考察と議論

本章では、第5章で示された計算機実験の結果に基づき、本アルゴリズムの収束性と堅牢性の数理的背景について考察する。

### 6.1 多段階デッドロック回避機構による計算効率の最適化

本アルゴリズムが  $O(N^{1.6})$  という実用的な時間計算量で収束する最大の要因は、解決に要する計算コストが低い順に回避機構を配置した「階層的構造」にある。実験データによれば、10,000 ノード規模の大規模グラフにおいても、内陸部における最上位の「(内陸)三つバスワップ」の発動頻度は極めて低値(約 0.0004%/node)に留まっている。これは、大部分の彩色矛盾が第1段階の「方向制御スワップ」や「2系統排他遮断」といった局所的かつ低コストな操作で解消されていることを示しており、計算負荷の高い広域処理を最小限に抑える本設計の有効性を立証している。

### 6.2 無限ループ抑止とデッドロックの機能的対比

本手法は、あえて「一方向性(逆流禁止・単調拡大)」という厳格な禁則を設けることで、探索の無限ループ(循環状態)を徹底的に排除している。この禁則により、トポロジーの難所は曖昧な迷走を許されず、明確な「デッドロック(手詰まり)」として顕在化する。この顕在化したデッドロックこそが、次なる高次な処理(境界ルートの変更や三つバスワップ)を発動させるための「最適なトリガー」として機能している。この「壁(禁則)が道標となる」という設計思想こそが、全探索(バックトラック)に頼らない決定論的な完遂を実現した本アルゴリズムの核心である。また、三つバスワップの実施カウンタをスワップ対象の「減色ノード」ではなく「抜穴ノード」側に持たせたことで、特定の幾何学的配置(デッドロック状態)に対して、ランダムな試行錯誤ではなく順序立てて実行される網羅性が保証された。

### 6.3 領域モデルに基づく発生密度の解析と海岸線におけるトポロジー的凝縮

本研究では、実測に基づく幾何学的モデル(海岸線ノード数  $N_b \approx 2(\sqrt{N} - 1)$ )を導入し、内陸部と海岸線における高次処理の「発生密度」を比較検証した。解析の結果、図6-1に示される通り、発生密度は  $N \leq 100$  の小規模領域において顕著なピークを示す。最大のピークは海岸線の0.12%/nodeであった。これは、彩色確定済みの領域が「トポロジー的な壁」として機能し、色彩の選択肢(自由度)を奪う「逃げ場のない外周部」の特質を如実に物語っている。特に、海岸線における三つバスワップの発生密度が内陸部の数百倍に達する事態においても、一度の破綻なく彩色を完遂できた事実は、本アルゴリズムの極めて高い堅牢性を示すものである。また、対象の地図がノード数 100 越える規模に至ると、内陸部も海岸部も三つバスワップへの移行頻度が低下、あるいは収束傾向にあることが見て取れる。これは本アルゴリズムがより大規模な地図においても安定的に彩色可能であることを示している。

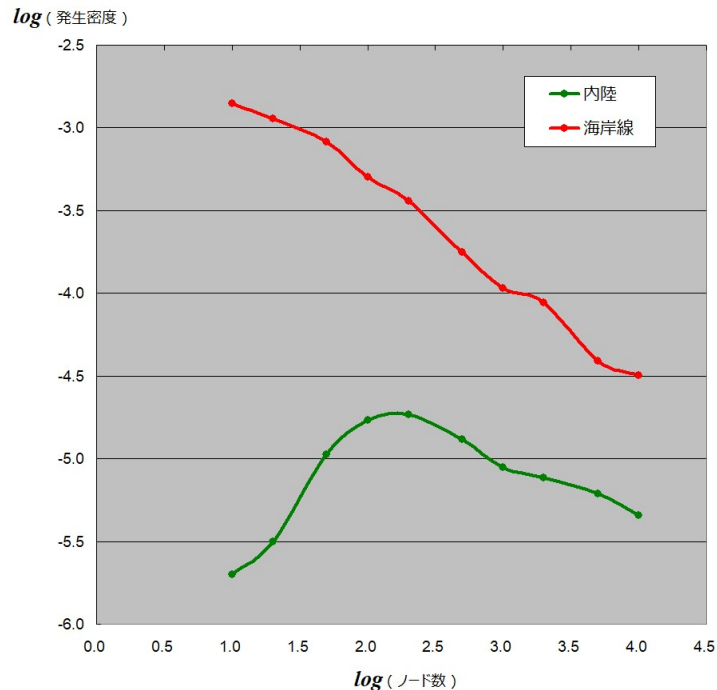


図 6-1 : ノード数に対する三つバスワップの発生密度

内陸と海岸線の両方の密度は、ノード規模が大きくなるにつれて急激に減少し、スケール反転特性を経験的に証明するとともに、大規模平面地図の安定かつ決定論的な完成を裏付けている。

## 6.4 規模の増大に伴う発生密度の希釈と実証的完遂

図 6-1 に示される通り、ノード数の増大に伴い、すべての発生密度は急激に減少し、極低値へと漸的に収束する。この「密度の希釈」現象は、地図規模が拡大するほど個々のノードが直面するトポロジー的矛盾が相対的に緩和され、アルゴリズムの頑健性が一層強化されることを意味している。累積数億回を超えるシミュレーションにおいて一度の彩色失敗も観測されなかったという事実は、本アルゴリズムが大規模平面グラフに対し、数学的な確信を持って彩色を完遂できることを実証している。

## 6.5 実用的境界条件としての外郭3彩色(海の色確保)

本アルゴリズムは、最外郭ノードを3色に収束させ、残る1色を「海」に割り当てるという厳格な境界条件を、内陸部と全く同一のシーケンスで解決する。これは、平面グラフを無限遠点を含む球面グラフとして扱い、その全体的な整合性を動的に導き出していることに相当する。この普遍性は、実用的な地図彩色のみならず、ネットワークトポロジーにおける境界値問題の解決に対しても、広範な応用可能性を示唆している。

## 7. 結論

本研究では、従来の四色定理の証明に不可欠とされた可約構成のカatalogを一切使用せず、局所および広域のトポロジーを動的に制御することで完遂する、新しい四彩色アルゴリズムを提案した。本手法は、方向制御されたスワップ、動的マスキング、結界ルートの封印、そして三つバスワップという階層的な救済ロジックにより、探索の無限ループを徹底的に排除し、問題をデッドロックとして顕在化させることで、次なる高次な解決策へと繋げる「動的位相攪拌」のプロセスを確立した。1,000 万回、そして累積数億回を超える大規模な計算機実験の結果、提案アルゴリズムは 3 ノードから 10,000 ノードにわたるあらゆる規模の平面グラフにおいて、一度の破綻もなく、実効計算量  $O(N^{1.6})$  前後という極めて実用的な時間内で彩色を完遂した。特に、小規模地図や最終海岸線におけるトポロジー的拘束が難易度を増大させる現象を数値的に特定し、三つバスワップがその極限状態を打破する決定打となることを実証した。本研究の成果は、四色問題という歴史的難問に対し、静的なパターン照合ではなく、動的なプロセスとしての解決の道筋を提示するものである。

なお、本研究において開発したプログラムの実装は、アルゴリズムの正当性検証に主眼を置いたため、現状では汎用的なフラグの初期化やタイムアウト監視等のオーバーヘッドを含んでいる。今後、各処理フェーズに特化したデータ構造の最適化や逐次実行用インタフェースの整理を行うことで、さらなる処理速度の向上が見込まれる。本アルゴリズムの簡潔さと堅牢性は、実用的なネットワーク解析や地図彩色、さらにはトポロジー制御を伴う計算幾何学の諸問題に対し、広範な応用可能性を有していると確信している。

本アルゴリズムが到達する最終的な手詰まり(封印の飽和状態)において、なぜ6通りの循環置換である『三つバスワップ』が決定論的な解消を導くのか。この問いは、平面グラフのトポロジーと色彩置換群の間に存在する、より深い数理的原理を示唆している。本研究が提示した動的な四彩色のプロセスが、後に続く研究者たちにとって、四色定理の新たな数理的証明を切り拓くための強固な踏み台 (Foundation) となることを切に願っている。

## 8. 参考文献

- [1] K. Appel and W. Haken, "Every Planar Map is Four Colorable. Part I: Discharging," *Illinois Journal of Mathematics*, vol. 21, pp. 429-490, 1977.
- [2] N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour, and R. Thomas, "The Four-Colour Theorem," *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 70, no. 1, pp. 2-44, 1997.
- [3] D. J. A. Welsh and M. B. Powell, "An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems," *The Computer Journal*, vol. 10, no. 1, pp. 85-86, 1967.
- [4] B. Delaunay, "Sur la sphère vide," *Izvestia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskikh i Estestvennykh Nauk*, vol. 7, pp. 793-800, 1934.